Vektorski prostori

October 4, 2022

Vektorski prostor

Neprazan skup V na kome su definisane dve operacije

1. $+ : V \times V \to V$, za $x, y \in V$, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V$
2. $\cdot : \mathbb{C} \times V \to V$, za $x \in V$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha\mathbf{x} \in V$

nazivamo vektorski prostor ako su zadovoljene sledeće aksiome:

a1) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$

a2) $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$

a3) $\exists \mathbf{0} \in V, \forall \mathbf{x} \in V : \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$

a4) $\forall \mathbf{x} \in V, \exists(-\mathbf{x}) \in V : \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

a5) $(\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x})$

a6) $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$

a7) $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$

a8) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Kažemo još i da je V ***vektorski prostor*** nad $\mathbb{C}$.

Primeri

- $\mathbb{R}^n = \{(x_1, ..., x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$
- $C[a, b] = \{f | f : [a, b] \to \mathbb{R}, f$ neprekidna funkcija $\}$ - skup neprekidnih funkcija na $[a, b]$
- $M_{m\times n}$ - skup matrica dimenzije $m \times n$
- $P_n(x)$ - polinomi stepena ne većeg od n
- {(0,. . .,0)} trivijalan v.p.
- prostor geometrijskih vektora u odnosu na sabiranje vektora i množenja skalarom
- ...

Vektorski potprostor

Definicija

*Neka je V vektorski prostor i W neprazan podskup od V ($W \subseteq V$). Tada se za W kaže da je **potprostor** od V ($W \leq V$) ako je W vektorski prostor nad operacijama sabiranja i množenja skalarom definisanim u V. Tj. treba da važi:*

1. $x, y \in W \implies x + y \in W$
2. $\alpha \in \mathbb{C}, x \in W \implies \alpha x \in W$.

Trivijalni potprostori vektorstog prostora V:

- $W = \{\mathbf{0}\}$
- V

Teorema

Ako su W i U potprostori vektorskog prostora V onda je i njihov presek $W \cap U$ potprostor od V.

Linearna zavisnost i nezavisnost vektora

Definicija

*Neka je V vektorski prostor. Za vektor $\boldsymbol{v} \in V$ se kaže da je **linearna kombinacija** vektora $\boldsymbol{u}_1, ..., \boldsymbol{u}_k \in V$ ako se $\boldsymbol{v}$ može zapisati u obliku:*

$$v = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + ... + \alpha_k \boldsymbol{u}_k$$

gde su $\alpha_1, ..., \alpha_k$ skalari.

Definicija

*Vektori $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_k \in V$ su **linearno nezavisni** ako jednačina*

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + ... + \alpha_k \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$$

ima samo trivijalno rešenje $\alpha_1 = ... = \alpha_k = 0$.
*Ukoliko postoje netrivijalna rešenja onda su vektori $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_k$ **linearno zavisni**.*

Geometrijska inetrpretacija:

1. Dva vektora u, v su linearno nezavisna ako nisu na istom pravcu (nisu paralelni)
2. tri vektora x, y, z su linearno nezavisna ako su nekomplanarni (ne leže u istoj ravni)

Teorema

Skup $S = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}, k \geq 2$ je linearno zavisan akko se bar jedan vektor $\mathbf{v}_i, i = 1, ..., k$ može zapisati kao linearna kombinacija drugih vektora iz V.

Dokaz na času.

Baza vektorskog prostora

Definicija

Neka je $S = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}$ *podskup vektorskog prostora* V*. Skup* S *je* ***pokrivač*** *od* V *ako se svaki vektor iz* V *može zapisati kao linearna kombinacija vektora iz* S*.*

Definicija

Skup $B = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\} \subset V$ *je baza vektorskog prostora* V *ako je:*

1. B *je pokrivač od* V *i*
2. B *je linearno nezavisan skup.*

Teorema

Ako je $B = \{\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n\}$ baza vektorskog prostora V onda se svaki vektor $\boldsymbol{v} \in V$ može zapisati na jedinstven način kao linearna kombinacija vektora iz B.

Dokaz na času.

Definicija

Ako vektorski prostor V ima bazu od n vektora, onda se broj n naziva dimenzijom vektorskog prostora V ($\dim(V) = n$).

Ako V sadrži samo nula vektor, tj. $V = \{\boldsymbol{0}\}$ onda $\dim(V) \stackrel{def}{=} 0$.